Proposta per l’elaborato di matematica e fisica

# Per lo studente

# Massimi, minimi e flessi e moto di un punto materiale

## Rifletti sulla teoria

* Spiega come puoi studiare la crescenza e la concavità di una funzione che ammette derivata prima e derivata seconda continue.
* Enuncia e dimostra il teorema di Lagrange. Forniscine un’interpretazione grafica.
* Enuncia alcune proprietà dell’integrale definito.
* Come puoi calcolare la velocità istantanea e l’accelerazione istantanea di un punto materiale a partire dalla sua legge oraria?
* Sia l’intensità di una forza impulsiva variabile definita nell’intervallo . Spiega che cos’è e come si calcola la forza media.
* Fornisci un esempio di forza la cui intensità dipende dalla posizione . Spiega come si calcola, in questo caso, il lavoro compiuto dalla forza quando il suo punto di applicazione si sposta da a .

## Mettiti alla prova

Considera la famiglia di funzioni

1. Verifica che ciascuna funzione ammette un massimo assoluto e un flesso e che, al variare di , tali punti appartengono a due rette orizzontali. Determina le equazioni delle due rette.
2. Enuncia il teorema della media
3. Verifica che il valor medio della funzione nell’intervallo è indipendente dal valore di .

Un punto materiale di massa è vincolato a muoversi lungo l’asse di un sistema di riferimento cartesiano in cui le distanze sono misurate in metri. La legge oraria del punto materiale è data dalla funzione per con le opportune unità di misura.

1. Determina la velocità media del punto nell’intervallo
2. Esiste un istante in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità media? Perché?
3. Esiste un istante in cui la forza agente sul punto si annulla? Se la risposta è affermativa, quanto vale in questo caso l’intensità della velocità di ?

## Possibile integrazione multidisciplinare

* Realizza una **simulazione grafica** del moto del punto materiale dove la legge oraria del punto materiale è data dalla funzione per .

Prosegue >>

# Per l’insegnante

## Possibili domande da fare durante il colloquio

In sede d’esame, per verificare l’effettiva comprensione della parte teorica, si possono fare allo studente le seguenti domande.

* Sia una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell’intervallo . Dimostra che se in , allora la funzione è crescente nell’intervallo aperto.
* Enuncia e dimostra il teorema di Torricelli.
* Definisci il concetto di primitiva per la funzione nell’intervallo .

*“Se una funzione ammette una primitiva essa è unica.”*

Commenta questa affermazione in base alle tue conoscenze.

* Supponi che sia l’espressione dell’intensità di una forza dipendente dal tempo che agisce su un punto materiale di massa . Spiega come si deducono le espressioni della velocità e della legge oraria del punto . Le informazioni sono sufficienti? In caso di risposta negativa, quali informazioni mancano?
* Fornisci un esempio di forza conservativa.
* Il campo elettrico indotto è conservativo? Perché?

## Traccia di svolgimento del *Mettiti alla prova*

1. **Massimo assoluto e flesso di ed equazioni delle rette a cui appartengono.**

Osserviamo che e per ogni . Inoltre, determiniamo il limite per usando gli ordini di infinito:

Calcoliamo le funzioni derivata prima di :

Quindi: per , per e per Tutte le funzioni della famiglia ammettono un massimo relativo in .

Poiché le funzioni nell’intervallo considerato sono sempre positive e il limite agli estremi è 0, il massimo relativo è anche assoluto. Calcoliamo il valore del massimo:

Pertanto il massimo assoluto al variare di ha coordinate e tutti i massimi appartengono alla retta .

Per trovare il punto di flesso calcoliamo la derivata seconda

Quindi: per , per e per . Tutte le funzioni della famiglia ammettono un flesso in . Calcoliamo il valore della funzione nel punto di flesso:

Pertanto il punto di flesso al variare di ha coordinate e tutti i flessi appartengono alla retta .

1. **Enuncia il teorema della media.**

Se è una funzione continua in un intervallo , esiste almeno un punto dell’intervallo tale che

Prosegue >>

1. **Calcolo del valor medio.**

Calcoliamo il valor medio della funzione. Per determinare l’integrale definito applichiamo la sostituzione e poi integriamo per parti:

Abbiamo verificato che il valor medio della funzione non dipende dal parametro .

1. **Calcolo della velocità media.**

La legge oraria è

La velocità media nell’intervallo è

1. **Punto in cui la velocità istantanea è uguale alla velocità media.**

La funzione è continua e derivabile in , perciò è continua in e derivabile in La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange e possiamo affermare che esiste almeno un valore tale che

1. **Ricerca degli istanti in cui si annulla la forza.**

L’accelerazione istantanea è data da

Per la seconda legge di Newton

La forza si annulla per s, nel punto di flesso della funzione Usiamo i calcoli svolti nelle richieste precedenti per determinare l’intensità della velocità :